e-ISSN: 2964-0687

APLIKASI *RENEWAL REWARD*
(Studi Kasus: Proses *Renewal Reward* pada Transaksi di *Mixue* Jimbaran)

Ni Putu Desy Susilawati [1], Komang Agus Mahendra Apriana[2],
Putu Ayu Liana Prasetya Dewi[3]
[1] Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Udayana [Email: putudesy046@student.unud.ac.id]
[2] Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Udayana [Email: mahendraapr047@student.unud.ac.id]
[3] Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Udayana [Email: ayulianapdewi067@student.unud.ac.id]

ABSTRACT

A stochastic process is a probability model that describes a series of events occurring randomly within the context of specific conditions or time intervals. Stochastic processes are divided into two types, namely discrete stochastic and continuous-time stochastic. One example of discrete-time stochastic is the renewal process, which is a computational process where the time intervals between arrivals are independent and have an identical distribution (IID) with any distribution. One specific type of renewal process is applied in the context of queues and involves rewards, also known as the renewal reward process. This article aims to demonstrate that one of the transactions at the Mixue company located in Jimbaran, Bali, near the Polytechnic of Bali (PNB), fulfills the characteristics of the renewal reward process. The characteristics of the renewal reward process that need to be met include the probability values $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ *dan* $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$. *To obtain the values of* $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ *dan* $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$, *this article utilizes secondary data obtained from the Mixue Jimbaran administration. After processing the data, the results show that the values of* $\frac{R(t)}{t} = Rp195.067$ *per unit time,* $\frac{E[R(t)]}{t} = Rp195.066{,}667$ *per unit time, and* $\frac{E[R]}{E[X]} = Rp210.000$ *per unit time. From these results, it can be concluded that one of the transactions at Mixue, located in Jimbaran, satisfies the characteristics of the renewal reward process.*

Keywords: *Stochastic Process, Renewal Process, Renewal Reward Process*

1. PENDAHULUAN

Proses stokastik merupakan suatu model probabilitas yang menggambarkan serangkaian kejadian yang terjadi secara acak dalam konteks kondisi atau interval waktu tertentu (Musafa & Meli, 2020). Proses stokastik merujuk pada suatu proses yang melibatkan elemen-elemen acak atau perubahan acak dari waktu ke waktu. Istilah "stokastik" berasal dari kata Yunani "*stokhastikos*", yang berarti acak atau keberuntungan. Ada dua jenis utama dari proses stokastik, yaitu: stokastik waktu diskrit dan stokastik waktu kontinu. Situasi sehari-hari yang mencerminkan proses stokastik, yaitu melibatkan antrian pada loket layanan, arus lalu lintas di jalan raya, waktu antara kedatangan pesawat di bandara, dan waktu pemrosesan di mesin produksi. Salah satu proses stokastik waktu diskrit adalah *renewal process*.

Renewal process (proses pembaharuan) adalah suatu proses perhitungan dimana jarak waktu antar kedatangannya bersifat independen satu sama lain dan memiliki distribusi identik (IID) dengan distribusi apapun. *Renewal process* dapat diterapkan dalam konteks antrian yang melibatkan *reward* atau tagihan. Dalam konteks ini, *renewal process* dapat digunakan untuk memodelkan waktu antara kedatangan pelanggan atau entitas ke dalam suatu antrian.

Sementara itu, *reward* dalam konteks ini bisa mencakup berbagai hal, seperti biaya layanan atau tagihan yang dikenakan pada pelanggan. Tagihan tersebut bisa bervariasi atau dihitung berdasarkan beberapa kriteria, misalnya, berdasarkan waktu layanan atau jenis layanan yang diberikan. Dengan memodelkan masalah antrian ini sebagai *renewal process* dengan *reward*, dapat digunakan konsep dari *renewal process* untuk menganalisis dan mengoptimalkan berbagai aspek sistem, termasuk waktu rata – rata antara kedatangan, utilitas sistem, atau pendapatan dari layanan yang diberikan.

Penerapan proses *renewal reward* dalam situasi antrian dapat dilihat melalui perhitungan biaya rata – rata yang dikeluarkan pada setiap kedatangan dalam suatu interval waktu t (Chasanah et al., 2016). Penerapan *renewal process* pada masalah antrian dengan *reward* dapat memberikan wawasan yang berharga dalam perencanaan operasional dan perbaikan efisiensi sistem antrian serta membantu dalam pengambilan keputusan terkait manajemen sumber daya dan pelayanan pelanggan. Misalnya, pada perusahaan atau bisnis yang bergerak di bidang kedai minuman teh dan es krim seperti *Mixue.*

Mixue merupakan sebuah waralaba yang menghadirkan es krim sajian lembut dan minuman teh, yang berasal dari Zhengzhou, Henan, Tiongkok (Candra Rini & Hartadi, 2023). *Mixue* berdiri sejak 17 Juni 1997. Menu utama yang ditawarkan oleh *Mixue* mencakup es krim dan minuman teh. Fokus penelitian ini adalah perusahaan *Mixue* yang berlokasi di Jimbaran, Bali, yang berdekatan dengan Politeknik Negeri Bali (PNB). Dalam penelitian ini, akan diberikan data yang menggunakan berlakunya karakteristik *renewal reward process* pada transaksi di *Mixue* Jimbaran. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana karakteristik dari *renewal reward process* dan memeriksa apakah transaksi di *Mixue* Jimbaran dapat memenuhi karakteristik dari *renewal reward process.*

2. METODE PENELITIAN

Penelitian proses *renewal reward* pada transaksi di *Mixue* Jimbaran menggunakan data sekunder yang diperoleh dari *admin Mixue* Jimbaran pada tanggal 17 November 2023 yakni pada pukul 13.00 WITA sampai 17.00 WITA. Variabel yang digunakan pada penelitian ini adalah jumlah kedatangan konsumen yang melakukan transaksi per satuan waktu, tagihan yang dibayarkan konsumen dalam waktu t (per satuan waktu), dan waktu antar kejadian transaksi. Data diperoleh dalam beberapa kloter, dimana pada setiap kloter terdiri dari 15 menit. Pengolahan data dan penyelesaian permasalahan pada penelitian ini, akan diteliti berdasarkan karakteristik dari *renewal reward process*, dimana proses tersebut berasal dari *renewal process* yang berkaitan dengan perhitungan tagihan rata – rata pada proses *renewal*.

Dapat diperhatikan pada suatu proses *renewal* $\{R(t), t \geq 0\}$ yang memiliki interval waktu antar kedatangan $\{X_n, n \geq 1\}$ dengan distribusi F sebarang. R_n menyatakan tagihan yang dibayarkan pada waktu *renewal* ke-n. Total tagihan atau biaya yang diterima dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

Ekspektasi dari waktu antar kedatangannya dinyatakan sebagai berikut:

$$E[X] = E[X_n]$$

Dan ekspektasi dari tagihan yang dibayarkan pada waktu *renewal* ke-n dinyatakan sebagai berikut:

$$E[R] = E[R_n]$$

Lemma 2.1 Misalkan $\{N(t),\ R_n\}$ dinyatakan sebagai proses *renewal reward*. Dengan demikian, untuk semua $t > 0$, variabel acak $N = N(t) + 1$ adalah *stopping time* untuk $R_1, R_2, \ldots$

BUKTI: Perhatikan bahwa $\{N = n\} = \{N(t) = n - 1\}$ yang mengindikasikan bahwa pada saat

t *renewal* $n-1$ telah terjadi, namun *renewal* ke-n belum terjadi. Misalkan,

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Adapun $N(t)+1=n$ menunjukan bahwa $S_{n-1} \leq t$ dan $S_n \geq t$, sehingga kejadian $N(t)+1=n$ saling bebas dari $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$. Dengan demikian, $N(t)+1$ adalah *stopping time* untuk barisan $\{X_n\}$. Meskipun, berdasarkan definisi *renewal* dengan tagihan, diketahui bahwa tagihan $R_{n+1}, R_{n+2}, \ldots$ saling bebas dari siklus *renewal* n pertama. Oleh karena itu, kejadian $\{N=n\}$ menjadi saling bebas dari variabel acak $R_{n+1}, R_{n+2}, \ldots$.

Teorema 2.2 Proses *renewal* dengan probabilitas 1.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

Dimana

$$\mu = E(X_n) \leq \infty$$

BUKTI: Dari definisi $N(t)$, dapat dinyatakan bahwa $S_{N(t)} \leq t \leq S_{N(t)+1}$ untuk semua nilai $t \geq 0$. Bagi ketiga ruas pertidak samaan dengan $N(t)$, sehingga diperoleh

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} \leq \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}$ adalah rata – rata waktu selang kepercayaan $N(t)$ yang pertama dengan hukum bilangan besar untuk $n \to \infty$.

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} \to E(X_n) = \mu$$

Diketahui bahwa $N(t) \to \infty$ dan $t \to \infty$, maka

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$$

Selanjutnya, dapat ditulis:

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \left[\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\right]\left[\frac{N(t)+1}{N(t)}\right]$$

Maka,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$$

Dikarenakan $\frac{t}{N(t)}$ berada di antara dua bilangan yang masing – masing mendekati μ ketika $t \to \infty$ dan $E(X) = \mu$, maka untuk nilai t yang meningkat tanpa batas $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$, diperoleh bahwa $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$ mendekati $\frac{1}{\mu}$ dengan probabilitas 1. Ini berarti dalam jangka waktu yang Panjang, rata – rata jumlah *renewal* per unit waktu hampir sama dengan kebalikan dari rata – rata waktu antara dua *renewal* berurutan

Teorema 2.3 $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ (dengan $\mu < \infty$ dan $\frac{1}{\infty} = 0$)

BUKTI: Misalkan $N = N(t)+1$, maka $S_{N(t)+1} > 1$. Akan digunakan sifat ekspektasi dan persamaan Wald, dimana dapat diperoleh

$$\mu(M(t)+1) > t$$
$$M(t)+1 > \frac{t}{\mu}$$
$$\frac{M(t)}{t} + \frac{1}{t} > \frac{1}{\mu}$$
$$\frac{M(t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

Sehingga untuk $t \to \infty$ diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} inf \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$$

Selanjutnya, akan dibuktikan

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

Kemudian, proses *renewal* baru didefinisikan sebagai berikut. Dimisalkan $A > 0$ adalah konstanta dan untuk $n = 1,2,\ldots,n$, kemudian

$$X_n^* \begin{cases} X_n; jika\ X_n \leq A \\ A; jika\ X_n > A \end{cases}$$

Misalkan,

$$S_n^* = \sum_{i=1}^{n} X_i^*$$

dan

$$N^*(t) = (n: S_n^* \leq t), M^*(t) = E\{N^*(t)\}$$

Misalkan,

$$S_n^* = S_n$$

oleh karena itu,

$$N^*(t) \geq N(t)$$

dan

$$M^*(t) \geq M(t)$$

Misalkan,

$$E(X_n^*) = \mu_A \leq \mu \text{ dan } \lim_{A\to\infty} \mu_A \to \mu$$

$$S_{N(t)+1}^* \leq t + A$$

Maka diperoleh,

$$E\left(S_{N(t)+1}^*\right) = \mu_A(M(t)+1) \leq t + A$$

$$\mu_A(M(t)+1) \leq t + A$$

$$M(t) + 1 \leq \frac{t+A}{\mu_A}$$

$$\frac{M(t)}{t} + \frac{1}{t} \leq \frac{t+A}{\mu_A t}$$

$$\frac{M^*(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_A} - \frac{1}{t} + \frac{A}{\mu_A t}$$

Oleh karena itu,

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{M^*(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu_A}$$

Karena $A \to \infty$, maka diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$$

Dengan demikian, berdasarkan hasil yang diperoleh yaitu $\lim_{t\to\infty} inf \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}$ dan $\lim_{t\to\infty} sup \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}$. Terbukti bahwa $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

Definisi 2.4 (Persamaan Wald) Ambil *N* sebagai variabel acak dengan nilai – nilai bilangan bulat. Anggap *N* sebagai *stopping time* untuk barisan peubah acak $X_1, X_2, \ldots$ jika untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$, kejadian $\{N = n\}$ bersifat independen dari variabel acak $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$

Selanjutnya, teorema dari karakteristik proses *renewal reward* sebagai berikut:

Teorema 2.5 Jika $E[R] < \infty$ dan $E[X] < \infty$, maka

i) Dengan probabilitas 1, $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$

ii) $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$

BUKTI:

Akan dibuktikan dengan probabilitas 1, $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$.

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{R(t)}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t}$$

Dengan hukum kuat bilangan besar dan probabilitas 1, diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)} \to \text{untuk } t \to \infty$$

Berdasarkan **Teorema 2.2,** diperoleh bahwa

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{E[X]} \text{ untuk } t \to \infty$$

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned}
\frac{R(t)}{t} &= \frac{R(t)}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{N(t)} R_n}{N(t)} \cdot \frac{N(t)}{t} \\
&= E[R] \cdot \frac{1}{E[X]} \\
&= \frac{E[R]}{E[X]} \text{ untuk } t \to \infty
\end{aligned}$$

Kemudian, untuk membuktikan $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$, perlu dibuktikan $\lim_{t\to\infty} inf \frac{E[R(t)]}{t} \geq \frac{E[R]}{E[X]}$ dan $\lim_{t\to\infty} sup \frac{E[R(t)]}{t} \leq \frac{E[R]}{E[X]}$

Pertama, akan dibuktikan $\lim_{t\to\infty} inf \frac{E[R(t)]}{t} \geq \frac{E[R]}{E[X]}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} inf \frac{E[R(t)]}{t} &\geq E\left[\lim_{t\to\infty} inf \frac{[R(t)]}{t}\right] \\
&= E\left[\lim_{t\to\infty} \frac{[R(t)]}{t}\right] \\
&= \frac{E[R]}{E[X]}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\lim_{t\to\infty} inf \frac{E[R(t)]}{t} \geq \frac{E[R]}{E[X]}$$

Kedua, akan dibuktikan $\lim_{t\to\infty} sup \frac{E[R(t)]}{t} \leq \frac{E[R]}{E[X]}$.

Ambil sebarang $M < \infty$ dan $R_n^M = max\{R_n, -M\}$

Perhatikan,

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n \leq \sum_{n=1}^{N(t)} R_n^M = R^M(t)$$

Kemudian, berdasarkan **Lemma 2.1**, $N(t) + 1$ adalah *stopping time* dari $R_1, R_2, \ldots$. Berdasarkan **Definisi 2.4,** dapat diperoleh

$$\frac{E[R(t)]}{t} \leq \frac{E\left[R^M(t)\right]}{t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{E[R(t)]}{t} &= \frac{E\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} R_n^M\right] - E\left[R_{N(t)+1}^M\right]}{t} \\
&= \frac{E[N(t)+1]E[R_1^M] - E\left[R_{N(t)+1}^M\right]}{t} \\
&= \frac{E[N(t)]+1}{t} E[R_1^M] + \frac{M}{t}
\end{aligned}$$

Kemudian, dengan menggunakan **Teorema 2.3** diperoleh

$$\lim_{t\to\infty} sup \frac{E[R(t)]}{t} \leq \lim_{t\to\infty} sup \left[\frac{E[N(t)]+1}{t} E[R_1^M] + \frac{M}{t}\right]$$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} sup \frac{E[R(t)]}{t} &= \lim_{t\to\infty} sup \left[\frac{E[N(t)]E[R_1^M]}{t} + \frac{E[R_1^M]}{t} + \frac{M}{t}\right] \\
&= \lim_{t\to\infty} sup \left[\frac{m(t)}{t} E[R_1^M] + \frac{E[R_1^M]}{t} + \frac{M}{t}\right] \\
&= \frac{1}{E[X]} \cdot E[R_1^M]
\end{aligned}$$

Karena $M < \infty$, sehingga $E[R_1^M] \to E[R_1] = E[R]$ untuk $M \to \infty$. Jadi $\lim_{t\to\infty} sup \frac{E[R(t)]}{t} \leq \frac{E[R]}{E[X]}$.

Diperoleh persamaan $\lim_{t\to\infty} inf \frac{E[R(t)]}{t} \geq \frac{E[R]}{E[X]}$ dan $\lim_{t\to\infty} sup \frac{E[R(t)]}{t} \leq \frac{E[R]}{E[X]}$. Sehingga terbukti bahwa $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$.

Dapat diperhatikan berdasarkan pembuktian **Teorema 2.5**, dapat dinyatakan bahwa perbandingan nilai antara tagihan atau *reward* yang dibayarkan dalam waktu t dan tingkatan waktu dalam proses, akan mendekati perbandingan nilai antara nilai ekspektasi dari tagihan yang dibayarkan pada setiap kedatangan dan ekspektasi waktu antar kedatangan. Untuk perbandingan nilai antara nilai ekspektasi total tagihan yang dibayarkan selama waktu t dan rentang waktu proses kejadian, nilainya akan mendekati perbandingan antara nilai ekspektasi tagihan yang dibayarkan pada setiap kedatangan dan nilai ekspektasi waktu antar kedatangan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Data Penelitian

Data dalam penelitian ini merupakan data sekunder. Data diperoleh dari admin *Mixue* Jimbaran, data transaksi pada hari Jumat, 17 November 2023 tepatnya pada jam 13.00 – 17.00 WITA. Data penelitian disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 1. Data Jumlah Kedatangan dan Total Tagihan (Reward)

No	Selang Waktu	Datang	Tagihan
1	13.00 - 13.14	4	Rp 67.000
2	13.15 - 13.29	6	Rp 229.000
3	13.30 - 13.44	6	Rp 136.000
4	13.45 - 13.59	5	Rp 141.000
5	14.00 - 14.14	6	Rp 157.000
6	14.15 - 14.29	6	Rp 158.000
7	14.30 - 14.44	6	Rp 202.000
8	14.45 - 14.59	4	Rp 164.000
9	15.00 - 15.14	6	Rp 208.000
10	15.15 - 15.29	5	Rp 200.000
11	15.30 - 15.44	6	Rp 284.000
12	15.45 - 15.59	6	Rp 231.000
13	16.00 - 16.14	6	Rp 140.000
14	16.14 - 16.29	6	Rp 219.000
15	16.30 - 16.44	4	Rp 196.000
16	16.45 - 16.59	5	Rp 164.000

Tabel 2. Tabel Waktu Antar Kedatangan

No	Selang Waktu	Waktu Antar Kedatangan					
1	13.00 - 13.14	0'	2'	3'	2'		
2	13.15 - 13.29	4'	1'	3'	2'	3'	3'
3	13.30 - 13.44	2'	2'	2'	2'	1'	7'
4	13.45 - 13.59	2'	2'	2'	2'	6'	
5	14.00 - 14.14	2'	5'	3'	2'	2'	1'
6	14.15 - 14.29	2'	1'	2'	2'	4'	5'
7	14.30 - 14.44	1'	1'	3'	1'	3'	4'
8	14.45 - 14.59	3'	2'	3'	2'		
9	15.00 - 15.14	4'	4'	2'	2'	2'	2'

10	15.15 - 15.29	1'	1'	2'	7'	3'	
11	15.30 - 15.44	2'	5'	1'	2'	2'	4'
12	15.45 - 15.59	2'	2'	4'	3'	1'	2'
13	16.00 - 16.14	2'	2'	6'	2'	2'	2'
14	16.14 - 16.29	2'	2'	2'	5'	1'	3'
15	16.30 - 16.44	1'	5'	7'	2'		
16	16.45 - 16.59	2'	3'	1'	5'	3'	

3.2 Pembuktian Karakteristik *Renewal Reward Process* pada Transaksi di *Mixue* Jimbaran

Berdasarkan **Teorema 2.5,** karakteristik suatu proses *renewal reward*, yaitu dengan probabilitas 1, $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$ dan $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$.

Akan dibuktikan bahwa dengan probabilitas 1, $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$. Pertama – tama, akan dihitung nilai $E[R]$.

Tabel 3. Tabel Perhitungan $\boldsymbol{E[R]}$

r	n	f(R)	r.f(R)
Rp 10.000	1	0,0111	Rp 111,11
Rp 12.000	1	0,0111	Rp 133,33
Rp 13.000	1	0,0111	Rp 144,44
Rp 16.000	20	0,2222	Rp3.555,56
Rp 18.000	1	0,0111	Rp 200,00
Rp 19.000	3	0,0333	Rp 633,33
Rp 20.000	3	0,0333	Rp 666,67
Rp 22.000	2	0,0222	Rp 488,89
Rp 26.000	5	0,0556	Rp1.444,44
Rp 27.000	1	0,0111	Rp 300,00
Rp 29.000	4	0,0444	Rp1.288,89
Rp 32.000	20	0,2222	Rp7.111,11
Rp 35.000	3	0,0333	Rp1.166,67
Rp 36.000	1	0,0111	Rp 400,00
Rp 38.000	1	0,0111	Rp 422,22
Rp 40.000	1	0,0111	Rp 444,44
Rp 42.000	4	0,0444	Rp1.866,67
Rp 47.000	1	0,0111	Rp 522,22
Rp 48.000	2	0,0222	Rp1.066,67
Rp 60.000	1	0,0111	Rp 666,67
Rp 64.000	3	0,0333	Rp2.133,33
Rp 67.000	1	0,0111	Rp 744,44
Rp 68.000	1	0,0111	Rp 755,56
Rp 80.000	3	0,0333	Rp2.666,67
Rp 88.000	1	0,0111	Rp 977,78
Rp 96.000	1	0,0111	Rp1.066,67
Rp138.000	1	0,0111	Rp1.533,33

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh bahwa:

$$E[R] = \sum_{i=1}^{n} r_i f(r_i)\text{n}$$
$$= Rp33.632\ per\ transaksi$$

dimana $E[R]$ merupakan ekspektasi tagihan yang dibayarkan ke-n.

Selanjutnya, akan dihitung nilai $E[X]$.

Tabel 4. Tabel Perhitungan $\boldsymbol{E[R]}$

x	0	1	2	3	4	5	6
n	1	17	40	14	7	6	2
f(x)	0,011	0,195	0,46	0,16	0,08	0,069	0,023
x.f(x)	0	0,195	0,91	0,48	0,32	0,344	0,138

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh bahwa:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$
$$= 2{,}402298851\ menit$$

dimana $E[X]$ merupakan ekspektasi waktu antar kedatangan. Dengan demikian, dapat diperoleh hasil dari $\frac{E[R]}{E[X]}$, yaitu:

$$\frac{E[R]}{E[X]} = \frac{Rp33.632}{2{,}402298851}$$
$$= Rp14.000\ per\ menit$$

Karena 1 satuan waktu adalah 15 menit, maka nilai

$\frac{E[R]}{E[X]} = Rp210.000\ per\ satuan\ waktu$

Selanjutnya, akan dilakukan pembuktian berlakunya karakteristik karakteristik suatu proses *renewal reward* pada transaksi di *Mixue* Jimbaran, dengan probabilitas 1, $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$. $R(t)$ adalah total tagihan dalam waktu t. Berdasarkan Tabel 1ss, nilai tagihan $R(t) = Rp2.926.000$. Dengan demikian, diperoleh nilai $\frac{R(t)}{t}$ sebagai berikut:

$$\frac{R(t)}{t} = \frac{Rp2.926.000}{15\ menit}$$
$$= Rp195.067\ per\ satuan\ waktu$$

Sehingga, berdasarkan proses perhitungan tersebut, diperoleh perbandingan nilai total tagihan yang dibayarkan dalam waktu t dan total waktu proses kejadian adalah $Rp195.067\ per\ satuan\ waktu,$ dengan satuan waktu per 15 menit.

Dikarenakan nilai $\frac{E[R]}{E[X]} = Rp210.000\ per\ satuan\ waktu$ dan nilai $\frac{R(t)}{t} = Rp195.067\ per\ satuan\ waktu$, maka terbukti bahwa, $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$.

Kemudian, akan dilakukan pembuktian terhadap berlakunya Teorema 2.5 (ii) yaitu berlakunya $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$. Dapat diketahui bahwa $R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} R_n$, maka $E[R(t)] = \sum_{i=1}^{N(t)} E[R_n]$. Karena $E[R_n] = E[R]$, maka $E[R(t)] = \sum_{i=1}^{N(t)} E[R]$. Dari perhitungan sebelumnya, diperoleh bahwa nilai $E[R] = Rp33.632\ per\ transaksi$ dan $N(t) = 87\ transaksi$, maka diperoleh:

$$E[R(t)] = \sum_{i=1}^{N(t)} E[R]$$
$$= \sum_{i=1}^{87} Rp33.244{,}444/transaksi$$
$$= (87\ transaksi)$$
$$\times (Rp33.632\ per\ transaski)$$
$$= Rp2.926.000$$

Sehingga,

$$\frac{E[R(t)]}{t} = \frac{Rp2.926.000}{15\ menit}$$
$$= Rp195.066{,}667$$

Sehingga, berdasarkan perhitungan di atas, diperoleh perbandingan nilai ekspektasi total tagihan yang dibayarkan selama waktu t dan total waktu proses kejadian adalah $Rp195.066,667\ per\ satuan\ waktu$, dengan satuan waktu per 15 menit.

Karena nilai $\frac{E[R]}{E[X]} = Rp210.000\ per\ satuan\ waktu$ dan nilai $\frac{E[R(t)]}{t} = Rp195.066,667\ per\ satuan\ waktu$, maka terbukti bahwa $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$.

Dengan demikian, dapat ditarik hasil bahwa perbandingan nilai antara total tagihan atau *reward* yang dibayarkan selama periode waktu t dan total waktu, serta perbandingan nilai antara nilai ekspektasi total tagihan yang dibayarkan selama waktu t dan total waktu proses kejadian, akan mendekati perbandingan antara nilai ekspektasi tagihan yang dibayarkan dan nilai ekspektasi waktu antar kedatangan. Oleh karena itu, transaksi pada *Mixue* Jimbaran tersebut memenuhi karakteristik proses *renewal reward.*

4. KESIMPULAN

Dari penelitian penerapan proses *renewal reward* pada transaksi di *Mixue* Jimbaran yang dilakukan tepatnya pada tanggal 17 November 2023 pukul 13.00 – 17.00 WITA, diperoleh hasil bahwa penelitian ini memenuhi karakteristik dari proses *renewal reward*. Penelitian pada transaksi di *Mixue* Jimbaran diperoleh hasil $\frac{R(t)}{t} = Rp195.067$, $\frac{E[R(t)]}{t} = Rp195.066,667$, dan $\frac{E[R]}{E[X]} = Rp210.000$, sehingga $\frac{R(t)}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$ dan $\frac{E[R(t)]}{t} \to \frac{E[R]}{E[X]}$ untuk $t \to \infty$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa transaksi pada *Mixue* Jimbaran memenuhi karakteristik proses *renewal reward*.

DAFTAR PUSTAKA

Candra Rini, I. T., & Hartadi, A. (2023). Pengaruh Harga terhadap Keputusan Pembelian Ice Cream (Studi Kasus di Mixue Yogyakarta). *Jurnal Bisnis, Manajemen, Dan Akuntansi*, *10*(2), 178. https://doi.org/10.54131/jbma.v10i2.170

Chasanah, D. M., Matematika, P. S., Sains, F., Teknologi, D. A. N., Islam, U., & Syarif, N. (2016). *Proses renewal reward*.

Ghahramani, S. (2015). Fundamentals of probability: With stochastic *process*es, third edition. In *Fundamentals of Probability: with Stochastic Processes, Third Edition*. https://doi.org/10.1201/b19602

Kakubava, R. (2008). Analysis of Alternating *RenewalProcess*es. *R&Rata*, *1*, 77–83.

Levy, J. B., & Taqqu, M. S. (2000). *Renewalreward process*es with heavy-tailed inter-*renewal*times and heavy-tailed *reward*s. *Bernoulli*, *6*(1), 23–44. https://doi.org/10.2307/3318631

Medhi, J. T. A.-T. T.-. (1994). *Stochastic processes* (2nd ed NV). J. Wiley New York. https://doi.org/ LK - https://worldcat.org/title/680105546

Musafa, M., & Meli, N. (2020). Studi Pendugaan Rekursif dan Nilai Dugaan Proses Obsrervasi Model Hidden Markov. *Imajiner: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *2*(6), 540–548. https://doi.org/10.26877/imajiner.v2i6.8147

Sigman, K. (2018). *Some basic renewal theory : The Renewal Reward Theorem*. *0*, 1–8.

Suyono. (2003). *Renewal processes and repairable systems*. *0*(1), 1–9.

Udoumoh, E. F. (2022). *Stochastic Modelling of Oil Spill Incidences as Renewal Process*. *2*(2), 28–33.

Vlasiou, M. (2014). *Renewal processes with costs and rewards*. 1–7. https://doi.org/10.1002/9780470400531.eorms0722

Walpole, R. E. (1990). *Pengantar Statistika*. Penerbit PT Gramedia Pustaka Utama. https://books.google.co.id/books?id=hzwjcgAACAAJ